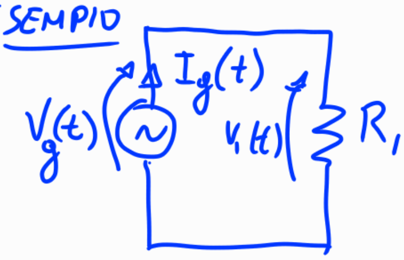
Circuiti in tensione alternata (AC)

Si tratta di circuiti in cui i generatori forniscono tensioni sinusoidali.
Restano valide tutte le leggi studiate (Ohm, Kirchhoff).

ESEMPIO

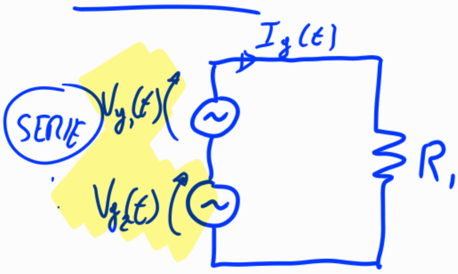


$V_g(t) = 30 \text{ sen } (4t) \text{ V}$

$R = 10\,\Omega$

$I_g(t) = \dfrac{V_g(t)}{R} = \dfrac{30 \text{ sen}(4t)}{10} = 3 \text{ sen}(4t) \text{ V}$

ESEMPIO 2



$V_{g_1}(t) = 30 \text{ sen}(4t)$

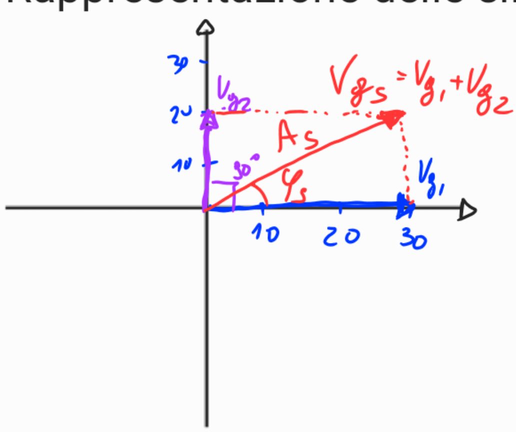
$V_{g_2}(t) = 20 \text{ sen}(4t + \frac{\pi}{2})$

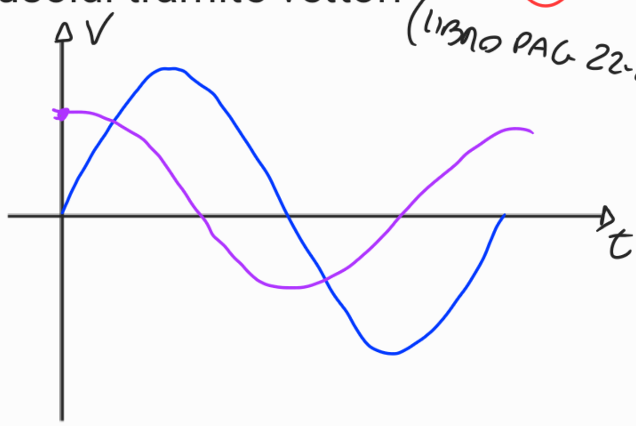
$V_{g_S}(t) = V_{g_1} + V_{g_2} = 30 \boxed{\text{sen}(4t)} + 20 \boxed{\text{sen}(4t + \frac{\pi}{2})} =$

$= A_S \text{ sen}(4t + \varphi_S)$

Rappresentazione delle sinusoidi tramite vettori

(LIBRO PAG 22-26)





Clicca qui per le simulazioni interattive:
1) sinusoide singola
2) sinusoide doppia
3) somma di sinusoidi

Rappresentazione delle sinusoidi tramite numeri complessi

(LIBRO PAG 31-32)

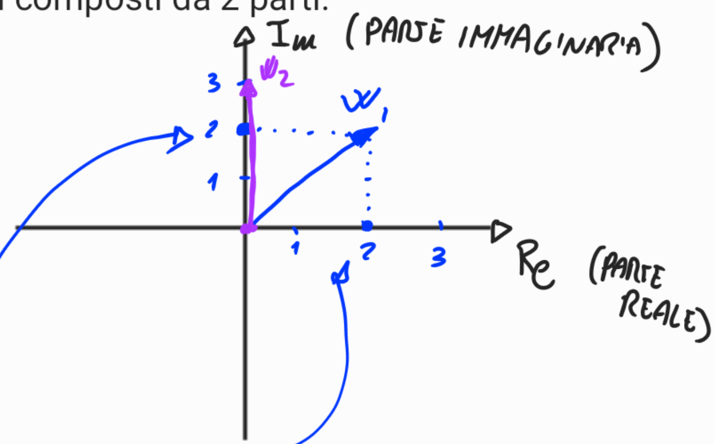
I numeri complessi sono particolari numeri composti da 2 parti:

$W = \underbrace{a}_{\text{PARTE REALE}} + j\, \underbrace{b}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$

j → UNITÀ IMMAGINARIA

$j = \sqrt{-1}$

$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

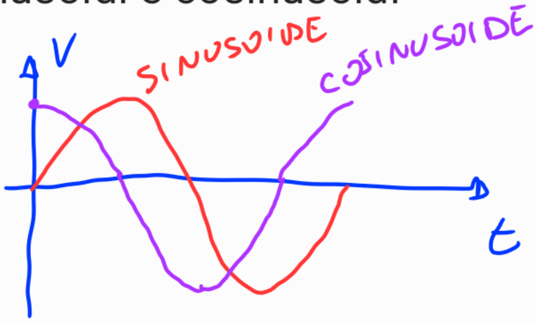


ESEMPIO

$W_1 = 2 + j2$

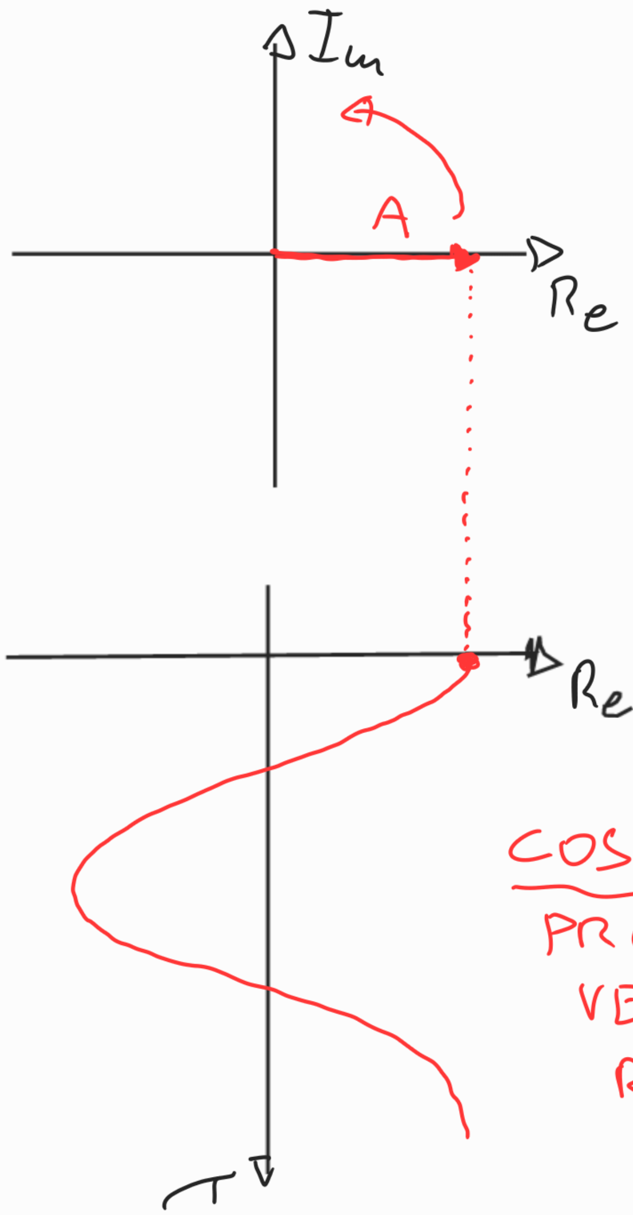
$W_2 = j3$

Sinusoidi e cosinusoidi



<u>COSINUSOIDE</u> = SINUSOIDE SFASATA DI 90° IN ANTICIPO

$$\cos(\omega t) = \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2)$$



<u>SINUSOIDE</u> = PROIEZIONE DEL VETTORE SULL'ASSE IMMAGINARIO

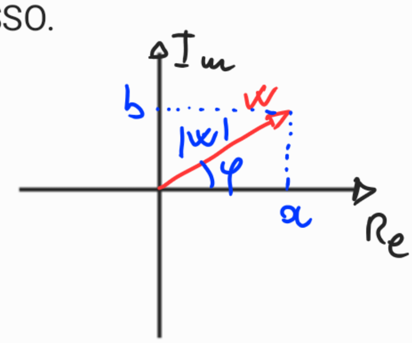
<u>COSINUSOIDE</u> = PROIEZIONE DEL VETTORE 'A' SULL'ASSE REALE

Forma polare di un numero complesso (LIBRO PAG. 33-34)

Fino ad ora abbiamo rappresentato i numeri complessi in questo modo:

$$W = a + jb$$

Questa si chiama FORMA CARTESIANA DI UN NUMERO COMPLESSO.



$$W = |w| e^{j\varphi}$$

$\varphi \rightarrow$ FASE

e = NUMERO DI NEPERO = 2,718....

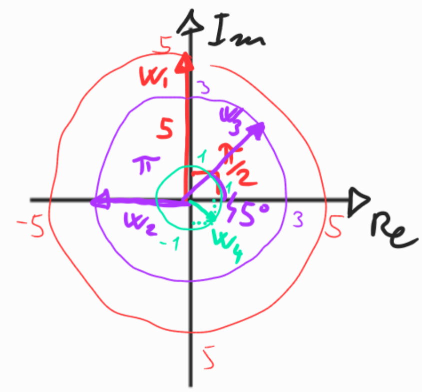
$|w| \rightarrow$ MODULO DI W = AMPIEZZA VETTORE

Questa si chiama FORMA POLARE DI UN NUMERO COMPLESSO.
La forma polare si può anche scrivere così:

$$W = |w| \angle \varphi \qquad W = |w| \arg \varphi$$

$\angle \rightarrow$ SIMBOLO CHE SIGNIFICA "ANGOLO"

arg → "ARGOMENTO" = FASE



ESEMPI:

$w_1 = 5e^{j\pi/2}$

$w_2 = 3\angle 180°$

$w_3 = 3e^{j45°}$

$w_4 = 1e^{-j\pi/4}$

Operazioni coi numeri complessi

$w = a + jb = |w| e^{j\alpha}$
$z = c + jd = |z| e^{j\beta}$

ESEMPIO
$w = -4 + j0 = 4e^{j0}$
$z = 6 - j8 = 10e^{-j53}$

1) Somma e sottrazione

Forma cartesiana

Si sommano la parte reale e la parte immaginaria separatamente

$$\boxed{w + z = (a+c) + j(b+d)}$$

ESEMPIO
$w + z = (-4+6) + j(0-8) = 2 - j8$

Clicca qui per la simulazioni interattiva della somma

Forma polare

⚠ SOLO SE HANNO LA STESSA FASE

$w + z = (|w| + |z|) e^{j\alpha}$ → $\alpha = \beta$

SCONSIGLIATO

2) Moltiplicazione

Forma cartesiana

Si esegue una normale moltiplicazione tra due binomi

⚠ SCONSIGLIATA (LUNGA)

$j = \sqrt{-1}$

$j \cdot j = -1$

$$w \cdot z = (a + jb) \cdot (c + jd) =$$
$$= ac + jad + jbc + jjbd =$$
$$= (ac - bd) + j(ad + bc)$$

ESEMPIO:
$$w \cdot z = (-4) \cdot (6 - j8) = (-4 \cdot 6) + j(-4 \cdot -8) =$$
$$= -24 + j32$$

Clicca qui per la simulazioni interattiva della moltiplicazione

Forma polare

SI ESEGUE UNA MOLTIPLICAZIONE APPLICANDO LE PROPRIETÁ DELLE POTENZE

$$\boxed{w \cdot z = |w| \cdot |z| e^{j(\alpha+\beta)}}$$

ESEMPIO:
$$w \cdot z = 4e^{j0} \cdot 10e^{-j53} = 40e^{j(0-j53)} =$$
$$= 40e^{-j53}$$

3) Divisione

Forma cartesiana

⚠ IN GENERALE MEGLIO EVITARE MA IN QUESTI CASI SI PUÓ FARE:

1) DIVISIONE PER NUMERO REALE

$$\frac{w}{c} = \frac{a+jb}{c} = \frac{a}{c} + j\frac{b}{c}$$

ESEMPIO:
$$\frac{z}{2} = \frac{6-j8}{2} = \frac{6}{2} - j\frac{8}{2} = 3 - j4$$

2) DIVISIONE PER NUMERO IMMAGINARIO:

$$\frac{w}{jd} = \frac{a+jb}{jd} = \frac{a}{jd} + \frac{\cancel{j}b}{\cancel{j}d} = \frac{j}{j}\cdot\frac{a}{jd} + \frac{b}{d} = -\frac{ja}{d} + \frac{b}{d}$$

NON É BENE AVERE j AL DENOMINATORE SI PUÓ NORMALIZZARE

ESEMPIO:
$$\frac{z}{j2} = \frac{6-j8}{j2} = \frac{6}{j2} - \frac{\cancel{j}8}{\cancel{j}2} = \frac{j}{j}\cdot\frac{6}{j2} - 4 = -\frac{j6}{2} - 4 = -j3 - 4$$

Forma polare

SI ESEGUE UNA DIVISIONE APPLICANDO LE PROPRIETÁ DELLE POTENZE

$$\boxed{\frac{w}{z} = \frac{|w|}{|z|} e^{j(\alpha-\beta)}}$$

ESEMPIO
$$\frac{w}{z} = \frac{4e^{j0}}{10e^{-j53}} = 0{,}4\, e^{j(0-(-53))} =$$
$$= 0{,}4\, e^{j53}$$

Clicca qui per la simulazioni interattiva della divisione

4) Complesso coniugato

Forma cartesiana

Numero con la stessa parte reale
e parte immaginaria cambiata di segno

$$\boxed{\overline{w} = a - jb}$$

ESEMPIO

$$\overline{w} = 4 \cancel{-j0}$$

$$\overline{z} = 6 + j8$$

Forma polare

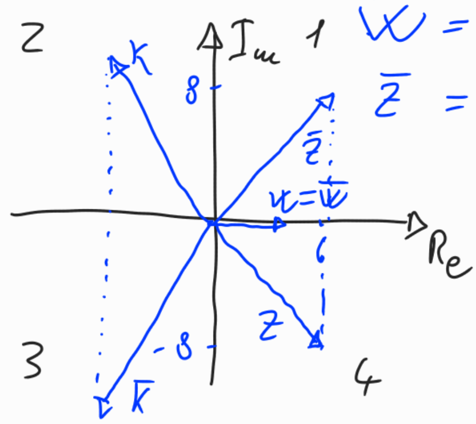
NUMERO CON STESSO MODULO E FASE CAMBIATA DI SEGNO

$$\boxed{\overline{w} = |w| e^{-j\varphi}}$$

ESEMPIO

$$\overline{w} = 4 \cancel{e^{-j0}}$$

$$\overline{z} = 10 e^{+j53°}$$



COMPLESSO CONIUGATO = SPECCHIAMENTO DEI VETTORI RISPETTO ALL'ASSE REALE

Proprietà

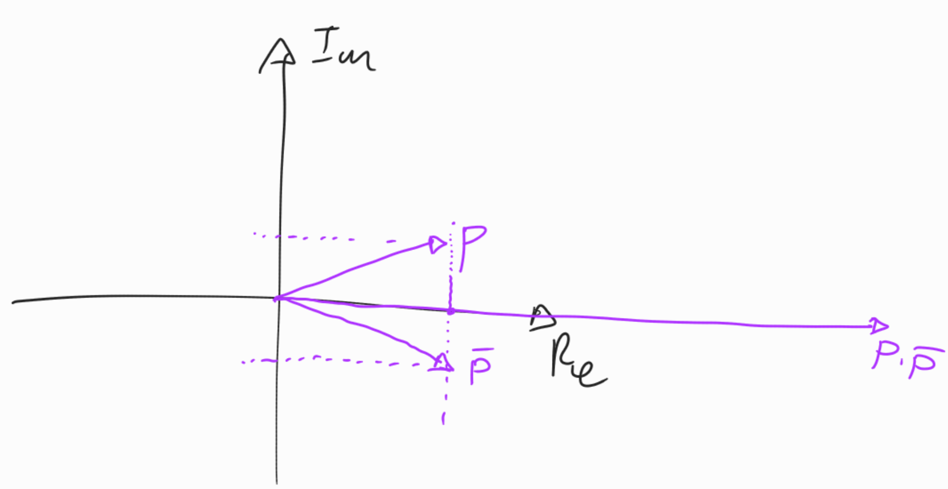
Il prodotto di un numero complesso col suo coniugato è un numero reale dato da:

$$\boxed{w \cdot \overline{w}} = (a+jb)\cdot(a-jb) = a^2 \cancel{-jab} \cancel{+jab} - j^2 b^2 =$$

$$= \boxed{a^2 + b^2}$$

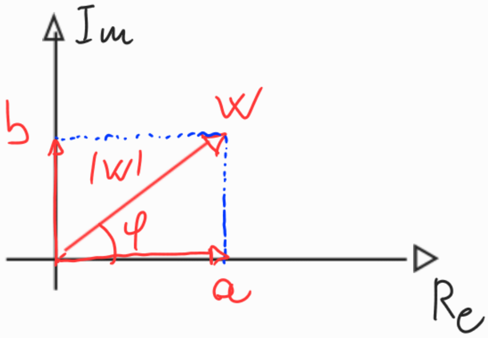
ESEMPIO

$$z \cdot \overline{z} = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$



Conversione da forma cartesiana a polare (pag 34,35)

Formule matematiche su cui si basano le conversioni



FORMA CARTESIANA

$W = a + jb$

FORMULA DI EULERO:

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi$

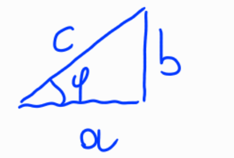
FORMULE INVERSE TRIGONOM.

INVERSA(cos) : arcos

INVERSA(sin) = arcsen

INVERSA (tan) = arctan

TEOREMA DI PITAGORA:



$c = \sqrt{a^2+b^2}$

TRIGONOMETRIA:

$a = c\cos\varphi \to \cos\varphi = \frac{a}{c}$

$b = c\,\mathrm{sen}\,\varphi \to \mathrm{sen}\,\varphi = \frac{b}{c}$

$\boxed{\frac{b}{a} = \tan\varphi}\ \left(= \frac{\cancel{c}\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cancel{c}\cos\varphi}\right)$

- **MODULO** (LUNGHEZZA DEL VETTORE) $|W| = \sqrt{a^2+b^2}$
- **FASE** (ANGOLO DAL PIANO REALE) $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ [I e IV QUADRANTE → $a>0$]

  $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ [II e III QUADRANTE → $a<0$]

ESERCIZIO

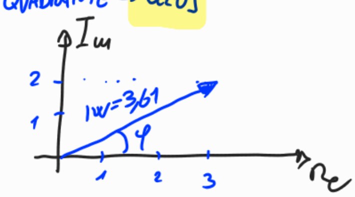
$W_1 = (3+j2)\,V$ → $|W| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = 3{,}61\,V$

FORMA CARTESIANA

$\varphi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}7°$

$W_1 = 3{,}61\,e^{j33{,}7°} = |W|\cdot e^{j\varphi}$

FORMA POLARE

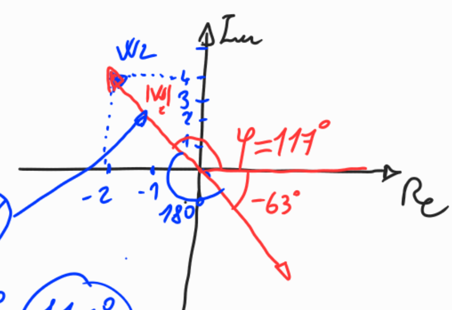


ESERCIZIO 2

$W_2 = (\underset{a}{-2} + j\underset{b}{4})\,V$ → $|W_2| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4{,}47\,V$

$\varphi = \pi + \arctan\left(\frac{4}{-2}\right) = \pi + \arctan(-2) = \underline{-63°} + 180° = 117°$

$\boxed{W_2} = |W_2|\,e^{j\varphi_2} = \boxed{4{,}47\,e^{j117°}}$



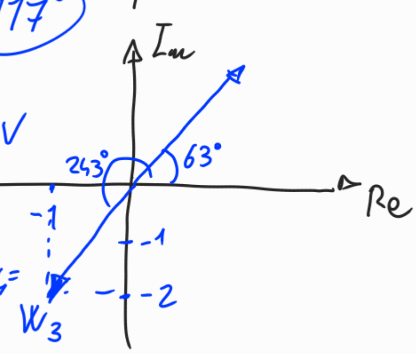
ESERCIZIO 3

$W_3 = (-1 - j2)\,V$ → $|W_3| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = 2{,}24\,V$

$a<0$

$\varphi = 180° + \arctan\left(\frac{+2}{+1}\right) = 180° + \arctan(2) = 180 + 63{,}4 = 243{,}4°$

$\boxed{W_3 = 2{,}24\,e^{j243°}}$



Conversione da forma polare a cartesiana

- PARTE REALE (LUNGHEZZA DELLA PROIEZIONE SULL'ASSE REALE)

$$\boxed{a = |w| \cos\varphi}$$

- PARTE IMMAGINARIA (LUNGHEZZA DELLA PROIEZIONE SULL'ASSE IMMAGINARIO)

$$\boxed{b = |w| \operatorname{sen}\varphi}$$

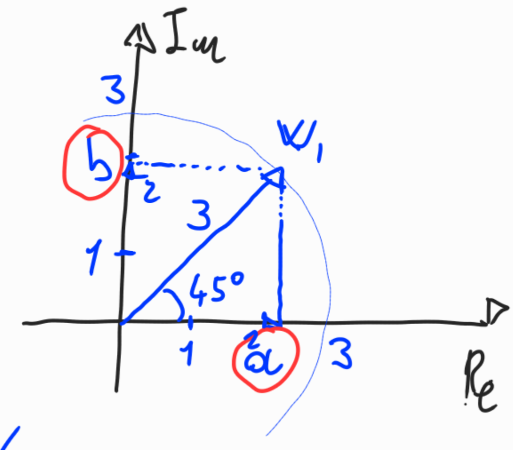
ESERCIZIO 1

$W_1 = 3\, e^{j45°}\ V$

$a = |W| \cos\varphi = 3 \cos 45° = 3 \cdot 0{,}71 =$
$= 2{,}12\ V$

$b = |w| \operatorname{sen}\varphi = 3 \operatorname{sen} 45° = 3 \cdot 0{,}71 = 2{,}12\ V$

$W_1 = 2{,}12 + j\,2{,}12 = 2{,}12\,(1+j)\ V$



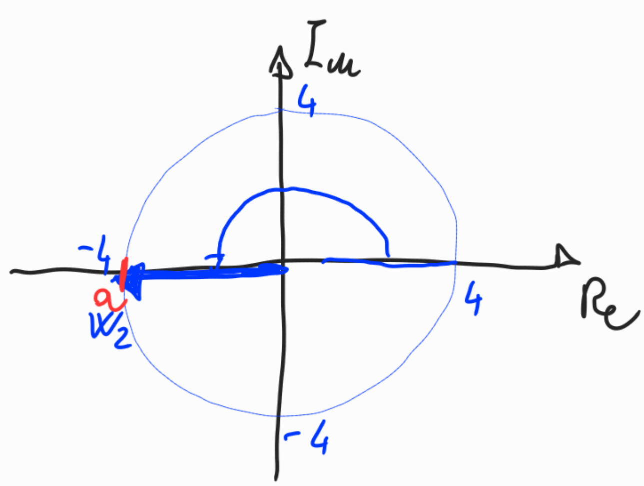
ESERCIZIO 2

$W_2 = 4 \arg \pi$

$a = -4\ V \qquad |W| \cos\varphi = 4 \cos\pi = -4\ V$

$b = 0\ V \qquad |w| \operatorname{sen}\varphi = 4 \operatorname{sen}\pi = 0\ V$

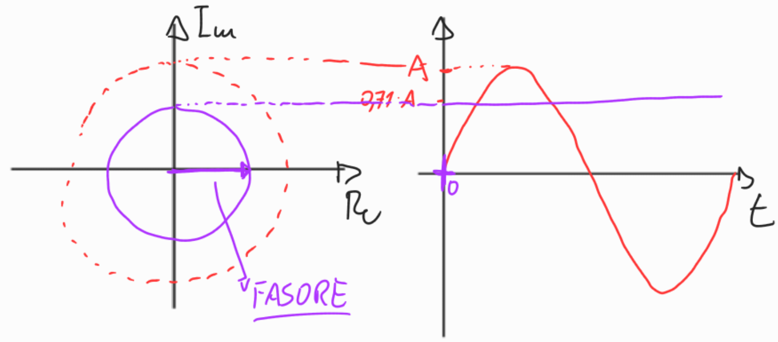
$W_2 = -4\ V$



Rappresentazione delle sinusoidi tramite FASORI (pag. 99-102)

Finora abbiamo capito che è conveniente rappresentare le sinusoidi come vettori. Per studiare i circuiti in alternata è utile usare un tipo particolare di vettore che si chiama fasore, con le seguenti caratteristiche:

1) Si considera il vettore fermo al tempo t=0.
2) lo modulo del vettore (e quindi la sua lunghezza) non è l'ampiezza della sinusoide ma il suo valore efficace.



Usando i fasori (invece che semplici vettori) è possibile calcolare la potenza con la formula già nota: P = V·I (tutti valori efficaci).

$$V_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}71A \longrightarrow A = \sqrt{2}\, V_{eff} = 1{,}41 \cdot V_{eff}$$

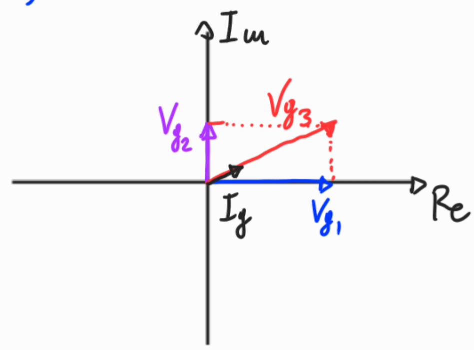
NOTA BENE 1: I fasori si possono usare solo se nel circuito tutti i generatori forniscono tensioni sinusoidali alla stessa frequenza.

NOTA BENE 2: Usando i fasori valgono tutte le leggi dei circuiti finora studiate: Ohm, Kirchhoff, Thevenin, Potenza, Energia, Serie, Parallelo, Sovr. effetti, ecc.

La differenza è che nei calcoli compariranno numeri complessi e verrà introdotta qualche altra grandezza elettrica.

A questo punto è possibile risolvere l'esercizio inziale lasciato in sospeso..

$$V = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$



$$V_{g_1} = 30\,\mathrm{sen}(4t)\,V$$

$$V_{g_2} = 20\,\mathrm{sen}\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)V$$

$$V_{g_1,eff} = |V_{g_1}| = 0{,}71 \cdot 30 = 21{,}3\,V$$

$$V_{g_2,eff} = |V_{g_2}| = 0{,}71 \cdot 20 = 14{,}2\,V$$

$$\varphi_1 = 0°$$

$$\varphi_2 = 90°$$

$$\vec{V}_{g_1} = 21{,}3\,e^{j0}\,V \qquad a = 21{,}3\,\underbrace{\cos 0}_{=1} = 21{,}3\,V \qquad b = 21{,}3\,\mathrm{sen}\,0 = 0\,V \qquad = 21{,}3\,V$$

$$\vec{V}_{g_2} = 14{,}2\,e^{j90}\,V \qquad a = 0\,V \qquad b = 14{,}2\,V \qquad = j14{,}2\,V$$

$$\vec{V}_{g_3} = \vec{V}_{g_1} + \vec{V}_{g_2} = (21{,}3 + j14{,}2)\,V$$

$$|\vec{V}_{g_3}| = \sqrt{21{,}3^2 + 14{,}2^2} = 25\,V$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{14{,}2}{21{,}3}\right) = 34°$$

$$\vec{I}_g = \frac{\vec{V}_{g_3}}{R} = \frac{21{,}3 + j14{,}2}{10} = (2{,}13 + j1{,}42)\,A$$